Clase 6: Derivadas direccionales

C. J. Vanegas

27 de abril de 2008

preliminares

Sean $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ fijos en $\mathbb{R}^3$. Considere la recta L que pasa por $\overline{x}$ y tiene dirección $\overrightarrow{v}$, es decir: $L = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \overline{y} = \overline{x} + t\overrightarrow{v}\ t \in \mathbb{R}\}$ o $L(t) = \overline{x} + t\overrightarrow{v}$.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h(t) = f(L(t)) = f(\overline{x} + t\overrightarrow{v})$ que no es otra cosa que f restringida a L.

Nos podemos hacer la pregunta siguiente:

Con que velocidad cambian los valores de f sobre la recta L en el punto $\overline{x}$?

Respuesta:

Teorema 1. *La derivada direccional de f en $\overline{x}$ según el vector $\overrightarrow{v}$ es:*

$$\frac{d}{dt} f(\overline{x} + t\overrightarrow{v})\Big|_{t=0}$$

Si esta existe.

☞ En esta definición normalmente de elige $\overrightarrow{v}$. Como un <u>vector unitario</u>. Es decir que nos movemos en la dirección $\overrightarrow{v}$ con rapidez uno.

☞ La definición de derivada dirección. Solo nos dirá verdaderamente la variación de f respecto de la distancia a lo largo de una recta en una dirección dada si v es un vector unitario.

☞ Podemos definir la derivada direccíonal como:

$$\frac{d}{dt} f(\overline{x} + t\overrightarrow{v})\Big|_{t=0} = \lim_{t=0} \frac{f(\overline{x} + t\overrightarrow{v}) - f(\overline{x})}{t}$$

Teorema 2. *Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable entonces todas las derivadas direccionales existen.*

La derivada direcciona en $\overline{x}$ en la dirección $\overrightarrow{v}$ es igual a $DF(\overline{x})\overrightarrow{v} = \nabla f(\overline{x}) \cdot \overrightarrow{v}$.

Demostración :

$$\frac{d}{dt}f(\underbrace{\overline{x}+t\overrightarrow{v}}_{l(t)})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(l(t))\Big|_{t=0} = Df(l(t))D(l(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(l(t))\cdot l'(t)\Big|_{t=0}$$
$$= \nabla f(\overline{x}+t\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{v}\Big|_{t=0} = \nabla f(\overline{x})\cdot\overrightarrow{v}.$$

□

☞ No es necesario utilizar rectas al calcular la variación de f en una dirección determinada $\overrightarrow{v}$, pues para una trayectoria general $c(t)$ con $c(0)=\overrightarrow{x}$ y $c'(0)=\overrightarrow{v}$ se obtiene igualmente $\frac{d}{df}f(c(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\overline{x})\cdot\overrightarrow{v}$

Ejemplo 1. *Hallar la derivad direccional de la función:*
$f(x,y,z)=e^x\cos yz$ *en el punto* $(0,0,0)$ *y en la dirección* $\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$
Solución:
Observamos que f *es diferenciable ya que las derivadas parciales existen y son continuas; Calculamos el vector gradiente:*
$\nabla f(\overline{x}) = (e^x\cos yz, -ze^x\cos yz, -ye^x\cos yz) \Rightarrow \nabla f(\overline{x})\Big|_{(0,0,0)} = (1,0,0)$, *Calculamos la norma de* $\overrightarrow{v}$, $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{4+1+4}=3$, *así* $\nabla f(0,0,0)\cdot\frac{1}{3}(2,1,-2) = (1,0,0)\cdot(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$

1. significado geométrico del vector gradiente.

Teorema 3. *Supongamos que* $\nabla f(\overline{x})\leq 0$. *Entonces* $\nabla f(\overline{x})$ *apunta en la dirección en la cual* f *crece mas rápidamente.*

Demostración : Si $\overrightarrow{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección $\overrightarrow{n}$ viene dad por : $\nabla f(\overline{x})\cdot\overrightarrow{n} = ||\nabla f(\overline{x}|||\overrightarrow{n}||\cos\theta$, con θ entre $\overrightarrow{n}$ y $\nabla f(\overline{x})$. El valor máximo del lado derecho se alcanza cuando $\theta=0$, es decir cuando $\overrightarrow{n}$ y $\nabla f(\overline{x})$ son paralelos.
Si $\nabla f(\overline{x})=0 \Rightarrow$ la variación es $0\forall\overrightarrow{n}$. □

☞ Si deseamos movernos en la dirección en la que f crece mas rápidamente debemos hacerlo en la dirección $\nabla f(\overline{x})$ y si es en la dirección en la cual f crece mas rpidamente entonces debemos hacerlo en la dirección $-\nabla f(\overline{x})$.

Ejemplo 2. *Para* $f(x,y,z)=xy+yz+xz$.
Cual es la dirección máxima de crecimiento en $(1,1,1)$*?*

Solución:
Como f es diferenciable ya que las derivadas parciales existen y son continuas; Calculamos el vector gradiente:
$\nabla f(\overline{x}) = (y+z, x+z, y+x)$. *Luego* $\nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$

2. Relación entre el vector gradiente de una función f y sus superficies de nivel.

☞ El ∇f apunta en la dirección en la cual los valores de f cambian mas rápidamente, mientras que, una superficie de nivel esta en la dirección en la que no cambia en absoluto.
Sin embargo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es c^1 y $\overline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ (S es la superficie de nivel $f(x,y,z) = k$, con $k \in \mathbb{R}$), entonces $\nabla f(\overline{x}_0) \perp S$ en el siguiente sentido:
Si $\overrightarrow{v}$ es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $c(t)$ en S con $c(0) = \overline{x}_0$, entonces $\nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Esto es claro, pues $f((c(t)) = k$ ya que $c(t)$ es un punto de S, (esto es $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$), luego $0 = \dfrac{d}{df} f(c(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(c(0)) \cdot \overrightarrow{v} = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overrightarrow{v}$.
Donde $c'(t)$ es el vector tangente en t a la trayectoria $c(t)$.
☞ Ahora observamos que es natural definir el plano tangente a S como el plano ortogonal al gradiente: $\nabla f(\overline{x}_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ si $\nabla f(\overline{x}_0) \leq 0$

3. Derivadas parciales iteradas.

☞ Decimos que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es c^1 si existen sus derivadas parciales: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y son continuas.
☞ Si estas derivadas tienen a su vez derivadas parciales continuas decimos que f es de clase c^2 (o dos veces continuamente diferenciable) y así sucesivamente.

Ejemplo 3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \end{cases}$$

Igualmente pasa para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *y para* $\frac{\partial f}{\partial z}$,

☞ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ *se llaman derivadas cruzadas.*

Ejemplo 4. 1 ☛ *Si* $f(x,y) = \sin(x+y^2)$. *Entonces :*

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y^2) & \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y^2)2y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y^2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x+y^2)4y^2 + 2\cos(x+y^2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(x+y^2)2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y^2)2y \end{array}\right\}$$

Note que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

2 ☛ *Si* $f(x,y) = xyz$. *Entonces :*

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz & \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz & \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = 1 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = 1 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = 1 \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = 1 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = 1 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 1 \end{array}$$

Note que las derivadas parciales cruzadas coinciden.

3.1. Igualdad de la derivadas parciales cruzadas.

Teorema 4. *Si* $f(x,y)$ *es de clase* c^2, *entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, esto es :*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

☞ Este teorema también es valido para funciones de $n > 2$ variables.

Ejemplo 5. *Sea* $f(x,y) = e^x y^2$*,* $x = g(s,t)$ *y* $y = h(s,t)$ *con* $g,h \in c^2$*. Sea* $k(s,t) = f(g(s,t), h(s,t))$*.*
Calcule k_{st} *y* k_{ts}*?*
Solución:

$\dfrac{\partial k}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$ *por lo que:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 k}{\partial t \partial s} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial t}\right]\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial t}\right]\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s} \\ &= \left[e^x y^2 g_t + 2ye^x h_t\right] g_s + e^x y^2 g_{st} + \left[2ye^x g_t + 2e^x h_t\right] h_s + 2ye^x h_{st}. \qquad (1)\end{aligned}$$

De igual manera calculamos $\dfrac{\partial^2 k}{\partial t \partial s}$.
Utilizando el teorema 4 nos damos cuenta que: $k_{ts} = k_{st}$

Demostración : (Teorema 4) Si y_0 y $\triangle\, y$ son fijos , definimos $g(x) = f(x, y_0 + \triangle\, y) - f(x, y_0)$ si ahora consideramos la expresión $S(\triangle\, x, \triangle\, y) = g(x_0 + \triangle\, x) - g(x_0)$ y utilizamos el teorema del valor medio obtenemos que: $S(\triangle\, x, \triangle\, y) = g'(\tilde{x}) \triangle\, x$, $\tilde{x} \in (x_0 + x_0 + \triangle\, x) \Rightarrow S(\triangle\, x, \triangle\, y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, y_0 + \triangle\, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, y_0)\right] \triangle\, x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) \triangle\, x \triangle\, y$, con $\tilde{y} \in (y_0, y_0 + \triangle\, y)$.
Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua entonces,

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0) ojo (\tilde{x}, \tilde{y} \to (0,0))} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Como $S(\triangle\, x, \triangle\, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = S(\triangle\, y, \triangle\, x)$ entonces, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\square$